

# Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk

(Publisert: Juni, 2018)

## INNHALD

---

Innleiing .....	2
Utfordringar i matematikkfaget .....	2
Oppdraget: Kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk.....	3
Nettbasert rettleiar for kvalitet i læremiddel.....	4
Definisjon av læremiddel og strukturen i kunnskapsgrunnlaget.....	4
DEL 1: Kva kjenneteiknar god matematikkundervisning? .....	6
Matematisk kompetanse .....	6
Vurdering og matematisk kompetanse.....	8
Praksisar som fremmar djupnelæring i matematikk .....	9
Samanhengen mellom undervisningskvalitet og læringsutbytte .....	12
Kva kjenneteiknar arbeidsformer og læremiddel i matematikk? .....	14
DEL 2: Kva kjenneteiknar eit godt læremiddel i matematikk? .....	16
Framstilling av matematiske emne og innhald i læremiddel .....	17
Kognitive krav, pedagogikk og didaktiske val .....	18
Digitale læremiddel og verktøy i matematikkundervisninga.....	20
Oppsummering av del 1 og del 2 .....	23
DEL 3: Kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk – eit grunnlag for den digitale rettleiaren .....	26
Kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk.....	29
Design .....	30
Pedagogisk og didaktisk kvalitet .....	31
Kopling til læreplanverket.....	32
Vurdering av kvalitetskriterium – og overføring til andre fag .....	33
Referansar .....	34

---

Kunnskapsgrunnlaget er forfattet av Olaug Svingen og Øystein Gilje (leder av arbeidsgruppa). Øvrige medlemmer av arbeidsgruppa for å utarbeide kvalitetskriterier for læremidler i matematikk har bidratt med innspill og tekst (i alfabetisk rekkefølge): Tor Espen Kristensen, Simen Spurkland, Ingunn Valbekmo og Hanne Brede Vig. Merethe Fagernæs har representert Utdanningsdirektoratet. Arbeidsgruppa takker for innspill på tidligere versjon fra både medlemmer i referansegruppa og utvalgte personer i Utdanningsdirektoratet.

## INNLEIING

---

Opplæringa i Noreg bygger på læreplanverket. Læreplanane beskriv mellom anna formålet med og hovudområde og grunnleggjande ferdigheiter i dei enkelte faga. Den overordna delen i læreplanverket, om verdiar og prinsipp for grunnopplæringa, gir føringar for arbeidet med faga og set fagkompetansen inn i ein større samanheng.

Kompetanseomgrepet er fornya i den overordna delen (2017) og trer i kraft med dei nye læreplanane i 2020, men hovudprinsippa i Kunnskapsløftet (LK06) ligg fast. Læreplanane som gjeld i dag, er vedtatt med heimel i opplæringslova og har status som forskrift. Den nye læreplanen i matematikk, frå 2020, er dermed ein del av læreplanverket og har heimel som ein del av forskrift til opplæringslova. Eitt av måla i fornyinga av Kunnskapsløftet er å styrke djupnelæringa og forståinga i faga (Meld. St. 28 (2015–2016)). Verdigrunnlaget skal løftast fram i læreplanane, og dei tverrfaglege temaa demokrati og medborgarskap, berekraftig utvikling og folkehelse og livsmeistring skal prioriterast.

I den første delen av fagfornyinga har 15 arbeidsgrupper jobba med å utvikle kjerneelement i faga. I dette dokumentet er det referert til kjerneelementa i matematikk som blei vedtatt i juni 2018.

## UTFORDRINGAR I MATEMATIKKFAGET

---

Matematikk er eit stort og viktig fag både i grunnskolen og i vidaregåande skole.<sup>1</sup> Berre norskfaget har fleire timar i løpet av dei første elleve åra i grunnopplæringa.

Det blir satsa stort på å gi norske lærarar meir kompetanse, både gjennom vidareutdanning og gjennom ei utvida lærarutdanning.<sup>2</sup> Årsaka er at det er innført minstekrav – med tilbakeverkande kraft – for å undervise i mange av faga i grunnopplæringa.<sup>3</sup> Matematikk er det faget i skolen der flest lærarar manglar studiepoenga som skal til for å oppfylle kompetansekrava. 11 400 lærarar i matematikk, nesten kvar tredje lærar, har ikkje den kompetansen dei skal ha for det trinnet dei underviser på, ifølgje Utdanningsspeilet 2017 (Udir,

---

<sup>1</sup> I læreplanen som gjeld for 2017/2018 har 1.–4. trinn 560 timar, 5.–7. trinn 328 timar og 8.–10. trinn 313 timar. På Vg1 studieførebuande er det 140 timar, mens det på Vg1 yrkesfag er 84 timar.

<sup>2</sup> Lærarløftet. [https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/vedlegg/planer/kd\\_strategiskole\\_web.pdf](https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/vedlegg/planer/kd_strategiskole_web.pdf)

<sup>3</sup> Regjeringa krev at lærarar har relevant kompetanse i faga matematikk, engelsk, norsk, samisk og norsk teiknspråk. (Lærarløftet s. 11)

2017). På grunnskolenivå manglar éin av fem matematikklærarar fordjuping i faget. I internasjonale samanlikningar har norske matematikklærarar låg fagleg kompetanse.<sup>4</sup>

At læremidla er viktige, både i undervisninga og for læringsutbyttet til elevane, er éin av grunnane til at regjeringa vil sjå nærmare på kvalitetskriterium for læremiddel i matematikkfaget.

---

#### OPPDRAGET: KVALITETSKRITERIUM FOR LÆREMIDDEL I MATEMATIKK

---

Meld. St. 28 (2015–2016), om fagleg fornying i skolen, tar for seg læremiddel og varslar tiltak som kan gjere skoleleiarar og lærarar meir bevisste når dei vurderer kvaliteten på læremidla. Det er særleg viktig sidan både skoleleiarar og lærarar dei neste åra skal velje læremiddel i samband med fagfornyninga. Satsinga på kvalitet er også ein del av den nasjonale strategien for realfag i barnehagen og i grunnopplæringa, *Tett på realfag* (2015–2019). I tillegg er arbeidet relevant i relasjon til *FYR-prosjektet* (fellesfag, yrkesretting og relevans), som blei avslutta i 2016.

I Meld. St. 28 (2015–2016) ønsker departementet «å se på tiltak som kan gjøre skolene og lærerne mer bevisste på valg og bruk av læremidler. Økt bevisstgjøring skal styrke deres vurderinger av læremidlenes kvalitet» (s. 76). Utdanningsdirektoratet har fått i oppdrag å utvikle kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk og formidle dei på ein formålstenleg måte til ulike aktørar i grunnopplæringa. I oppdraget heiter det at kriteria samla skal gi eit «grunnlag for en helhetlig vurdering og omfatte ulike sider ved læremidler»:

Dette inkluderer for eksempel kriterier for koblingen til læreplanverket, faglighet, pedagogisk kvalitet, brukervennlighet og universell utforming. Kriteriene må være relevante for både papirbaserte og digitale læremidler. Kriteriene må derfor ta hensyn til det som er felles og det som er særegent ved disse to formene for læremidler.

Frå Kunnskapsdepartementets oppdragsbrev 21-16.

---

<sup>4</sup> For å oppfylle kompetansekravet for undervisning, jf. opplæringslova § 10-2, skal lærarar som underviser i matematikk på barnetrinnet, ha 30 studiepoeng i matematikk. For ungdomstrinnet er det tilsvarende talet 60. I GSI (Grunnskolen informasjonssystem) registrerer skolane dei lærarane som underviser i matematikk, etter studiepoeng. Prosentdelen som ikkje oppfyller kravet i matematikk, er størst på ungdomsskolen.

Som eit svar på oppdraget har vi laga ein digital rettleiar som er tilgjengeleg på nettsidene våre. Kriteria som er foreslått i oppdraget, kan delast i to grupper.

Koplinga til læreplanverket, fagleg og pedagogisk kvalitet er relevant for både papirbaserte og digitale læremiddel. At læremidla er brukarvennlege, og særleg at dei oppfyller krava om universell utforming, er primært relevant for digitale læremiddel, men har også relevans for trykte læremiddel.

## NETTBASERT RETTLEIAR FOR KVALITET I LÆREMIDDEL

---

I Meld. St. 28 (2015–2016) er det lagt vekt på at ein nettbasert rettleiar kan brukast til å støtte skoleeigarar og skoleleiarar i arbeidet med å vurdere og velje nye læremiddel i samband med fagfornyinga. Den digitale rettleiaren er derfor naturleg å bruke i det lokale arbeidet med dei nye læreplanane. Han skal også kunne brukast i lærarfellesskapen for å «øke bevisstheten om vurdering og valg av læremidler i matematikkundervisningen» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 77). I tillegg skal kvalitetskriteria i rettleiaren, som bygger på dette grunnlagsdokumentet, «gi signaler til forlag og læremiddelforfattere om hva som kjennetegner læremidler med god kvalitet» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 77).

Fram mot 2020 skal nærmare 400 skoleeigarar, over 3000 skoleleiarar og godt over 60 000 lærarar ta stilling til nye læremiddel og digital teknologi til bruk i alle fag i grunnopplæringa.

Utdanningsdirektoratet har utvikla ein digital rettleiar som består av ei rekke påstandar som lærarar, enten kvar for seg eller fleire saman, kan bruke til å vurdere eitt eller fleire læremiddel. Verktøyet dokumenterer vurderinga kvar enkelt lærar har gitt, og kan brukast til enten å samanlikne læremiddel eller til å samanlikne vurderingane fleire lærarar har gjort av det same læremiddelet. Slik ser ein for seg at rettleiaren kan bidra til refleksjon rundt kva som er god kvalitet, og skape eit grunnlag for bevisste val av læremiddel til bruk i matematikkundervisninga. Dette dokumentet er kunnskapsgrunnlaget for rettleiaren som Utdanningsdirektoratet publiserte på nettsidene sine i ein betaversjon i juni 2018.

## DEFINISJON AV LÆREMIDDEL OG STRUKTUREN I KUNNSKAPSGRUNNLAGET

---

Dette kunnskapsgrunnlaget gir ein forskingsbasert bakgrunn for kvalitetskriterium for læremiddel, og presenterer relevant forskning for oppdraget. Det er derfor viktig å presisere kva definisjon av læremiddel vi legg til grunn, i denne innleiinga. Både den teknologiske

utviklinga og utdanningspolitiske føringar gjer nemleg at definisjonar av læremiddel ikkje er konsistente over tid (Gilje, 2017, s. 41).

Til grunn for arbeidet med den digitale rettleiaren ligg ein definisjon av læremiddel som bygger på forskrift til opplæringslova. I paragraf 17.1 er læremiddel definert slik:

Med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet.

Med utgangspunkt i denne definisjonen og ein gjennomgang av relevant forskning gir dette dokumentet eit grunnlag for meir bevisste val av læremiddel i matematikk. Vi gir først ei oversikt over forskingsområde som kan vere relevante i arbeidet med å utvikle kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk, og viser deretter korleis desse forskingsområda er relaterte til strukturen i den nettbaserte rettleiaren.

Presentasjonen av forskingsområda er delt i to.

Del 1 handlar om korleis matematisk kompetanse blir forstått i ulike internasjonale rammeverk og testar. I tillegg presenterer vi forskning som seier noko om samanhengen mellom undervisning og læringsutbytte og kva for praksisar som fremmar djupnelæring i matematikk.

Del 2 belyser forskning som spesifikt analyserer læremiddel i matematikk, inkludert bruk av digitale læremiddel og verktøy i matematikk.

Del 3 gir ei kort oversikt over tidlegare rammeverk for kvalitet i læremiddel og løftar deretter fram tre kategoriar for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk:

1. design
2. pedagogisk og didaktisk kvalitet
3. kopling til læreplanverket

## DEL 1: KVA KJENNETEIKNAR GOD MATEMATIKKUNDERVISNING?

---

Del 1 gir ei oversikt over ulike sider ved matematikkfaget, kva som blir rekna som god matematikkundervisning, og gode praksisar som fremmar djupnelæring. Som innleiing til desse emna kan det vere nyttig å sjå nærmare på omgrepet «matematisk kompetanse», slik det er definert i ulike teoretiske rammeverk og i nasjonale og internasjonale testar. Til slutt i del 1 gir vi ei oversikt over korleis forskinga beskriv arbeidsformer i faget, og kva for læremiddelkultur som kjenneteiknar matematikkfaget.

### MATEMATISK KOMPETANSE

---

Fleire forskarar har, på ulike måtar, tatt for seg matematisk kompetanse dei siste tiåra. I dette avsnittet presenterer vi eit utval av desse bidraga.

Matematikkdidaktikar Julia Anghileri (2000) ved University of Cambridge i England beskriv elevar med god talforståing som fleksible i arbeidet med taloppgåver. Slike elevar har evna til å generalisere mønster og prosessar dei har lært, og knyte dette til ny kunnskap. Elevane ser og forstår samanhengar mellom tal og bruker kjende kunnskapseiningar til å løyse ukjende taloppgåver. Dei utnyttar for eksempel «tiarvenner», kjende svar frå multiplikasjonstabellen og liknande.

Dei australske forskarane McIntosh, Reys and Reys (1992) framhevar i tillegg eit emosjonelt aspekt i sin definisjon av talforståing. Deira definisjon består av tre hovudelement:

1. generell forståing av tal og operasjonar
2. bruk av denne forståinga i matematisk resonnering og utvikling av formålstenlege strategiar i arbeidet med tal og rekneoperasjonar
3. motivasjon til å gå inn i matematiske problemstillingar og bruke forståinga i arbeid med tal

Både Anghileri (2000) og McIntosh et al. (1992) beskriv kompetanse i arbeid med tal og utvikling av talforståing. Matematikk er meir enn tal og talforståing. I seinare forskning har arbeid med tal blitt ein del av ei breiare forståing av matematisk kompetanse, der ein beskriv matematisk kompetanse generelt, slik at det gjeld alle område innanfor matematikk.

Eitt av desse bidraga er ein amerikansk rapport frå starten av 2000-talet der forskarar gjekk igjennom forskning knytt til matematikk frå barnehage til og med 8. klasse: *Adding it Up*:

*Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Dei hadde behov for å definere kva som kjenneteikna vellykka læring i matematikk. Tidlegare var omgrep som for eksempel matematiske ferdigheiter og talforståing brukte. Desse omgrepa dekte noko av det dei fann som kjenneteikna læring og matematikk. Dei innførte derfor omgrepet «mathematical proficiency», som vi har omsett til «matematisk kompetanse». Definisjonen av matematisk kompetanse i dette arbeidet består av fem komponentar: forståing, berekning, bruk, resonnering og engasjement.

I Danmark ønskte Uddannelsesstyrelsen i samarbeid med Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd å fornye matematikkundervisninga. Mogens Niss og kollegaene hans (2002) beskrev åtte kompetansar i matematikk i eit svar på dette oppdraget. Dei åtte kompetansane var: tankegangskompetanse, resonnementskompetanse, kommunikasjonskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse og hjelpemiddelkompetanse.

Felles for dei to sistnemnde forskingsbidraga er at dei tar mål av seg til å dekke alle sider ved den matematiske kompetansen. Begge legg vekt på element som må ligge til grunn for at elevane skal utvikle matematisk kompetanse. Dei skil seg ikkje vesentleg frå kvarandre; det er to måtar å seie det same på. Forståing er beskrive som tankegangs- og representasjonskompetanse, berekning som symbol-, formalisme- og hjelpemiddelkompetanse, strategisk kompetanse som problemløysings- og modelleringskompetanse og resonnering som resonnements- og kommunikasjonskompetanse. Kilpatrick og kollegaer (2001) definerer engasjement som den femte komponenten. Denne komponenten, som er knytt til motivasjon og engasjement hos eleven, finn vi ikkje i rammeverket hos Niss og kollegaene hans (2002).

LK06 bygger på arbeidet til Niss and Jensen (2002) og vi finn her dei åtte kompetansane i formålet for faget matematikk. Alle åtte er ikkje direkte refererte, men omgrep som problemløysing, modellering, resonnering, kommunikasjon og hjelpemiddel er brukte for å beskrive matematisk kompetanse i formålet med faget. Symbol- og formalismekompetanse og tankegangs- og representasjonskompetanse blir forklarte som det å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere om løysinga er gyldig. LK06 poengterer i tillegg at elevane skal få erfaringar som skaper positive haldningar til faget. Å utvikle matematisk kompetanse som individet og samfunnet treng, inneber å arbeide med alle komponentane/kompetansane i faget. Det er derfor viktig at læremidla legg til rette for å

arbeide med alle dei seks kjerneelementa som ligg til grunn for dei nye læreplanane i matematikk. Dei seks kjerneelementa er:

- utforsking og problemløysing
- modellering og bruk
- resonnering og argumentasjon
- representasjon og kommunikasjon
- abstraksjon og generalisering
- matematiske kunnskapsområde

Vi vender tilbake til dei seks kjerneelementa i del 3.

## VURDERING OG MATEMATISK KOMPETANSE

---

Utover denne innleiande beskrivinga av matematisk kompetanse er det interessant å sjå på korleis matematisk kompetanse blir målt i internasjonale undersøkingar, og korleis rekning som grunnleggande ferdigheit blir målt i nasjonale prøver.

PISA-undersøkinga måler den matematiske kompetansen til elevane forstått som «individets evne til å formulere, bruke og vurdere matematikk i mange ulike sammenhenger og gjenkjenne hvilken rolle matematikk spiller i samfunnet» (Kjærnsli & Jensen, 2016, s. 13). Definisjonen av matematisk kompetanse som blir brukt i PISA, ofte referert til som *mathematical literacy*, har eit breiare spekter av kunnskapar og ferdigheiter enn det ein tradisjonelt tenker på i samband med matematikk i norsk skole (Olsen & Kjærnsli, 2013, s. 15; sjå også Organisation for Economic Cooperation & Development, 2013).

I PISA-undersøkinga ønsker ein med andre ord å få innsikt i korleis skolen førebur elevane på å bruke den matematiske kompetansen vidare i livet (Kjærnsli & Jensen, 2016; Olsen & Kjærnsli, 2013). Det blir lagt vekt på at elevane er problemløysarar, og oppgåvene tar derfor utgangspunkt i reelle og konkrete situasjonar frå ulike kontekstar. Elevane må ta i bruk heile eller delar av problemløysingsprosessen når dei skal løyse oppgåvene. PISA vurderer med andre ord korleis elevane evnar å løyse matematiske problem som tar utgangspunkt i konkrete og reelle situasjonar. Til saman er kompetansen til eleven delt inn i seks ulike nivå.



Også i TIMSS-undersøkinga blir evna til å bruke kunnskapar og ferdigheiter i ulike situasjonar målt (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016; Mullis & Martin, 2014). Denne internasjonale undersøkinga måler evna til å resonnerer, argumentere, sjå samanhengar, trekke slutningar og samanfatte. Det er utarbeidd ei beskriving av kompetansen hos elevane på fire nivå innanfor emneområda tal, geometri og statistikk på 4. trinn, og tal, geometri, statistikk og algebra på 8. trinn. Både PISA og TIMSS undersøker motivasjon og sjølvtilitt i faget, men på litt ulike måtar. Der TIMSS måler i kor stor grad eleven har oppnådd måla i læreplanen, måler PISA evna til å bruke matematikk i praktiske situasjonar (Bergem, 2016).

Nasjonale prøver i rekning måler i kor stor grad ferdigheitene til elevane er i samsvar med beskrivinga av rekning som grunnleggande ferdigheit i læreplanen til kvart fag.<sup>5</sup> Grunnleggande ferdigheiter i rekning inneber å kunne resonnerer og bruke omgrep, framgangsmåtar, fakta og verktøy for å løyse problem og for å beskrive, forklare og kunne sjå for seg kva som skjer. Problemstillingane i oppgåvene på dei nasjonale prøvene er situasjonar som elevane kan kjenne seg igjen i. Sentralt i den grunnleggande ferdigheita rekning er den totale problemløysingsprosessen, som består av dei fire ferdigheitsområda gjenkjenne og beskrive, bruke og bearbeide, reflektere og vurdere, og kommunisere (Utdanningsdirektoratet, 2012). Prøvene er elektroniske og blir gjennomførte på 5., 8. og 9. trinn.<sup>6</sup>

Dei nasjonale prøvene og dei internasjonale undersøkingane måler berre delar av den totale kompetansen som den nasjonale læreplanen i matematikk i Noreg uttrykker. Samtidig er det viktig å merke seg korleis både nasjonale prøver som måler den grunnleggande ferdigheita i rekning, PISA og TIMSS legg vekt på problemløysing. Oppgåver i problemløysing er viktige for å utvikle ein heilskapleg matematisk kompetanse som gjer elevane gode til å resonnerer, argumentere, sjå samanhengar, trekke slutningar og samanfatte. I del 3 kjem vi tilbake til korleis kvalitetskriterium i tilknytning til læreplanen må legge til rette for å utvikle ein slik kompetanse.

---

## PRAKSISAR SOM FREMMAR DJUPNELÆRING I MATEMATIKK

---

<sup>5</sup> Formålet med nasjonale prøver er å gi skolen kunnskap om kva ferdigheiter elevane har i lesing, rekning og engelsk. Informasjonen frå prøvene skal danne grunnlag for undervgsvurdering og kvalitetsutvikling på alle nivå i skolesystemet. Prøva for 9. trinn er den same som for 8. trinn. Prøva for 5. trinn tar utgangspunkt i kompetansemål etter 4. trinn, og prøva for 8. og 9. trinn tar utgangspunkt i kompetansemål etter 7. trinn.

<sup>6</sup> Sidan prøvene er elektroniske, måler dei i hovudsak dei tre ferdigheitsområda gjenkjenne og beskrive, bruke og bearbeide og reflektere og vurdere, og i liten grad kommunisere, sidan høvet til å kommunisere er avgrensa.

I den nye overordna delen av læreplanen, *Verdier og prinsipper for grunnopplæringen* (Kunnskapsdepartementet, 2017), blir det lagt vekt på at skolen skal «gi rom for dybdelæring slik at eleven utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger» (s. 11). «Dybdelæring innebærer også at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse» (Ludvigsen, 2014). Dette gjeld i alle fag, inkludert matematikk.

Motsatsen til djupnelæring blir ofte vist til som overflatelæring. Ifølge Sawyer (2014) kan kjenneteikn på djupnelæring og overflatelæring beskrivast slik:

Dybdelæring	Overflatelæring
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begreps-systemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskaps-elementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.

Tabell 1: (NOU, 2014)

Rutinebaserte oppgaver og det å memorere algoritmiske prosedyrar som læraren har forklart, dominerer mykje av matematikkundervisninga. I forskinga blir det peikt på at skolematematikken i for stor grad fører til overflatelæring hos elevane (Lithner, 2008). Ein konsekvens av det er at elevane ikkje får utvikla evna til kreativ resonnering, som er kjenneteikna ved at elevane finn løysingar på problem utan at framgangsmåten er kjend (Gilje et al., 2016; Johansson, 2017; Skaalvik, Danielsen & Skaar, 2007). Ifølge Lithner (2008) må kjennskap til ulike framgangsmåtar vere forankra i å forstå matematiske konsept for at elevane skal utvikle noko meir enn ei instrumentell forståing for faget.

Instrumentell forståing inneber at ein lærer eit sett med reglar og formlar som er til hjelp når ein skal løyse ei oppgåve. Eleven veit korleis han eller ho skal løyse oppgåva. Relasjonell forståing inneber at eleven bygger omgrepsmessige strukturar og ser samanhengar mellom

omgrep. Eleven veit både korleis oppgåva skal løysast, og kvifor det må gjerast slik. Beskrivinga av instrumentell og relasjonell forståing er nært knytt til det Hiebert (2013) kallar prosedyrekunnskap og omgrepsmessig kunnskap (sjå også Sfard, 1991). Prosedyrekunnskap er forklart som kunnskap om reglar og prosedyrar for å løyse problem. Omgrepsmessig kunnskap blir forklart som kunnskap som er rik på relasjonar, der relasjonar gjennomsyrrar individuelle bitar av fakta og informasjon og skaper eit samanhengande nett av kunnskap. Å legge til rette for djupnelæring er nødvendig for å fremme ein heilskapleg kompetanse slik han er beskriven i den overordna delen av læreplanen, men også nødvendig for å utvikle kompetansen, slik vi har skrive i innleiinga til denne delen. Å fremme djupnelæring i matematikk bygger på ein lang tradisjon i faget der forholdet mellom instrumentell og relasjonell forståing står sentralt (Skemp, 1976)

I ein diskusjon om kvalitet på læremiddel er det naturleg også å sjå på studiar som viser kva slags læringsmiljø som gir høve til djupnelæring. *The National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) har, på grunnlag av tidlegare forskning, beskrive åtte praksisar som støttar djupnelæring i matematikk (NCTM, 2014).

- **Leie undervisninga fram mot læringsmålet**

Å formulere klare og eksplisitte læringsmål legg ramma for kva som skal skje i klasserommet (Hiebert, Morris, Berk & Jansen, 2007). Eit mål skal beskrive kva for matematiske omgrep, idear eller metodar elevane skal forstå betre etter å ha fått undervisning.

- **Velje oppgåver som fremmar resonnering og problemløysing**

Læring skjer mest effektivt i klasserom der elevane blir utfordra til å løyse oppgåver som krev tenking og resonnering på høgt nivå (Boaler & Staples, 2008). Ei undersøking frå Umeå (Jonsson, Norqvist, Liljekvist & Lithner, 2014) viser at undervisning der elevane skaper sin eigen kunnskap basert på kreativ matematisk resonnering, gir betre læring enn undervisning basert på innlæring av algoritmar, såkalla algoritmisk resonnering.

- **Bruke og knyte saman matematiske representasjonar**

Når elevar lærer å representere og sjå samanhengar mellom matematiske idear på ulike måtar, viser dei djupare matematisk forståing og større evne til problemløysing (Fuson, Kalchman & Bransford, 2005).

- **Fremme meiningsfull matematisk diskusjon**

Eit klima i klasserommet som lar elevane dele idear, oppklare misforståingar, argumentere og utvikle eit matematisk språk, bidrar til djupare forståing og er kritisk for framtidig suksess i matematikk (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

- **Stille gode spørsmål**

I eit klasserom blir det stilt mange spørsmål – alt frå gjenkalling av fakta til spørsmål der eleven skal grunngi og forklare (Chapin & O'Connor, 2007). Alle typar spørsmål er nødvendige i eit klasserom, kvart til sitt bruk, men det er nødvendig å vere bevisst på kva for spørsmål ein skal stille, og når.

- **Utvikle fleksible strategiar**

Å utvikle fleksible strategiar handlar om meir enn å memorere fakta og ein serie steg i ein prosedyre (Baroody, 2006), og inneber at eleven er i stand til å velje mellom ulike metodar og strategiar, til å forstå og kunne forklare tilnærminga si og til å finne nøyaktige svar.

- **Støtte elevane i å anstrenge seg for å løyse matematiske problem**

Å støtte elevane når dei anstrenge seg, er viktig for læringa. Ofte overtar læraren tenkinga når elevane står fast (Reinhart, 2000). Læraren må planlegge undervisninga med tanke på kvar eleven kan få problem, og kva slags hjelp som vil vere produktiv for læringa.

- **Bygge på tenkinga til eleven**

Det er viktig å legge til rette for å avdekke resonnementet til eleven og bygge på det. Det handlar om å legge til rette for at eleven skal vise korleis ho eller han tenker, tolke tenkinga til eleven og komme denne tenkinga i møte på ein konstruktiv måte (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010).

Ei undervisning som bygger på desse prinsippa, gjer elevane i stand til å bruke den matematiske kompetansen sin i nye situasjonar og samanhengar utanfor skolen. Dette er eit særleg kjenneteikn ved djupnelæring, slik vi beskreiv det i innleiinga til dette avsnittet. I del 3 beskriv vi kvalitetskriterium i matematikk med særleg tanke på at læremiddel skal bygge opp under praksisar som fremmar djupnelæring.

#### SAMANHENGEN MELLOM UNDERVISNINGSKVALITET OG LÆRINGSUTBYTTE

---

Sjølv om gode læremiddel kan bidra til å skape god undervisning, viser internasjonal forskning at læraren er særleg viktig: «Den viktigste enkeltfaktoren for elevs læringsutbytte er kvaliteten på lærerens undervisning» (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2016; Hattie, 2009; Nilsen & Gustafsson, 2016; Nordenbo, 2008). Undervisninga er altså den viktigaste enkeltfaktoren for læring. Forskinga viser at god undervisning er heilt avgjerande for eit godt

læringsutbytte for eleven. Utfordringa er å identifisere dei faktorane ved undervisninga som gir høg kvalitet. På dette området har det vore fleire inndelingar. Éi tilnærming deler undervisningskvalitet inn i fire dimensjonar, nemleg *god klasseromsleiing, støttande lærar, tydelige intensjonar og faglege/kognitive utfordringar* (Baumert et al., 2010; Bergem et al., 2016; Klette, 2013). I TIMSS blir denne tilnærminga brukt for å analysere samanhengen mellom undervisningskvalitet og læringsutbytte.<sup>7</sup>

På bakgrunn av forskingsdesignen i TIMSS 2015 er det mogleg å sjå på relasjonen mellom matematikkundervisning og læringsutbytte på klassenivå. Elevprestasjonane i TIMSS-undersøkinga blir forstått som fagleg læringsutbytte, og undervisningskvaliteten blir rapportert av elevane i spørjeskjemaet som følger med undersøkinga. På den måten kan ein berekne «sammenhengen mellom lærerens undervisningskvalitet og elevenes læringsutbytte» (Bergem et al., 2016, s.123). Analysane viser at elevar som gjer det godt på prøva, rapporterer om betre undervisningskvalitet både på 5. trinn og til dels på 9. trinn, samanlikna med elevar som ikkje gjer det så godt (Bergem et al., 2016, s. 130). Sjølv om TIMSS viser ein samheng mellom det som blir beskrive som god matematikkundervisning, og læringsutbytte på klassenivå, seier undersøkingane mindre om kva rolle læremiddel spelar i undervisninga.

I tidlegare TIMSS-undersøkingar var det lagt inn enkelte spørsmål om bruken av lærebøker i undervisninga. I 2003 svarte 87 prosent av elevane på 4. trinn og 92 prosent av elevane på 8. trinn at den papirbaserte læreboka var hovudgrunnlaget for undervisninga. I 2007 svarte 88 prosent av lærarane på 4. trinn at læreboka var hovudgrunnlaget for undervisninga. Seinare blei matematikklærarar spurde i prosjektet ARK&APP om kva slags læremiddel dei brukte i undervisninga. Her svarte 85 prosent av lærarane på 5.–7. trinn og i ungdomsskolen at dei hovudsakleg brukte papirbaserte læremiddel. Det tilsvarende talet for matematikklærarar i vidaregåande skole var 74 prosent (Gilje et al., 2016).

Analysane i TIMSS kan derfor primært seie noko om læringsutbytte relatert til korleis elevane oppfattar undervisninga totalt. Samtidig viser ulike undersøkingar dei siste 15 åra at det berre er papirbaserte lærebøker som er brukte i denne undervisninga. Men svara her kan ikkje

---

<sup>7</sup> Læringsutbyttet blir målt ved hjelp av ein fagleg test, og spørsmål om undervisningskvaliteten er inkludert i eit spørjeskjema til elevane.

koplast direkte til kor stort læringsutbytte elevane har av undervisninga, og kva funksjon læremidla har i undervisninga.

#### KVA KJENNETEIKNAR ARBEIDSFORMER OG LÆREMIDDEL I MATEMATIKK?

---

Både variasjonen i arbeidsformer og bruken av læremiddel i matematikk skil seg noko frå tilsvarande i andre fag. Det viser både nasjonale forskingsprosjekt (Gilje et al., 2016; Hodgson, Rønning & Tomlinson, 2012; Klette, 2003) og internasjonale studiar (Andrews, 2001; Pepin & Haggarty, 2011). I hovudsak er det større grad av individuelt arbeid i matematikk enn i andre fag, og læraren bruker meir tid på såkalla monologisk klasseromsundervisning, som kan innebære at læraren modellerer framgangsmåtar på (interaktiv) tavle eller gjer utrekningar framfor elevane.

Trass i at elevane bruker fleire digitale læremiddel og verktøy i matematikk, kan det sjå ut som om arbeidsformene ikkje har endra seg i særleg grad (Gilje, 2017, s. 82–85). Datamateriale frå før Kunnskapsløftet, frå prosjektet PISA+ (med datainnsamling i 2004/2005), viser at matematikkundervisninga er kjenneteikna av eit relativt einseitig repertoar – *enten* heilklasseundervisning og gjennomgang på tavla *eller* arbeid med matematikkoppgåver individuelt (Klette et al., 2008). Eit forskingsprosjekt som blei gjennomført ti år etter (2013–2016) viser at matematikkfaget i dei fleste klasserom i hovudsak er prega av to arbeidsformer: heilklasseundervisning og individuelt arbeid (eventuelt med læringspartnar) (Gilje et al., 2016, s. 69).<sup>8</sup>

Både internasjonale og nasjonale studiar viser at lærebøker i matematikk har vore den mest sentrale koplinga mellom pedagogiske praksisar (arbeidsformer) og læreplanverket (Pepin, Gueudet & Trouche, 2013; Pepin & Haggarty, 2001)<sup>9</sup>. Ein norsk detaljert studie av læreboka i bruk fann at ho i hovudsak blei brukt til å løyse oppgåver (Karlsen & Maagerø, 2010).<sup>10</sup>

---

<sup>8</sup> Når ein samanliknar grunnskole og vidaregåande skole, er det faget matematikk som viser dei minste forskjellane i bruken av læremiddel. Sjølv om lærarane seier at dei bruker digitale læremiddel, framstår matematikk som eit papirbasert læremiddelfag med mindre innslag av digitale læremiddel og ressursar for læring enn dei andre faga. Matematikkfaget skil seg altså noko ut fordi bruken av heilklasseundervisning utan dialog og individuelt arbeid med oppgåver er meir utbreidd enn i andre fag.

<sup>9</sup> I denne forskinga skil ein ofte mellom seks ulike tilnærmingar: 1) om det er brukt lærebøker eller ikkje for undervisning og læring, 2) autoriteten til læreboka, 3) kven som bruker læreboka (elev/lærar), og kven som tar avgjerda om kven som skal bruke henne, 4) korleis læreboka blir brukt, kven som bestemmer korleis ho skal brukast, og kva læraren synest er verdifullt med læreboka, 5) læraren som mediator av teksten og 6) korleis den nasjonale tradisjonen påverkar kva som skjer i klasserommet.

<sup>10</sup> Dei konkluderer med at læreboka består av mange modalitetar: tal, matematiske symbol, bokstavar, verbalspråk, matematiske figurar, fotografi og illustrasjonar. Merksemda må rettast mot detaljar i teksten, både på mikronivå og på

Nyare studiar viser at lærebøker på papir har ein stor plass, sjølv om bruken av digitale læremiddel aukar (Gilje et al., 2016; Hatlevik, Egeberg, Guðmundsdóttir, Loftsgarden & Loi, 2013). Vi vender tilbake til digitale læremiddel og verktøy i slutten av del 2 i dette dokumentet.

---

teksten totalt, som er makronivået. Tal, matematiske symbol, bokstavar som nemningar og verbalspråk krev merksemd på mikronivå, mens dei ulike modalitetane på makronivå skal bindast saman til ein heilskap.

## DEL 2: KVA KJENNETEIKNAR EIT GODT LÆREMIDDEL I MATEMATIKK?

---

Læremiddelforskarar i Norden har inntil ganske nyleg vore svært lite opptatt av lærebøker (og andre læremiddel) i matematikk (Grevholm, 2017). I denne gjennomgangen må vi derfor sjå på internasjonale studiar og supplere med dei få studiane som er gjorde i Noreg og Norden. Innanfor den internasjonale forskinga skil Fan, Zhu & Miao, 2013 mellom fem perspektiv på læremiddel:

1. matematisk innhald og matematiske emne
2. kognitive krav og pedagogikk
3. kjønn, etnisitet, økonomi, kultur og verdier
4. internasjonale samanlikningar av lærebøker
5. konseptualisering og metodiske forhold

Forsking på tema og didaktiske val i sjølve læremiddelet har fått større merksemd internasjonalt dei siste tre tiåra, og det finst ei rekke ulike perspektiv i studiar av lærebøkene som er i bruk i skolen. Pepin and Haggarty (2001) presenterer ei oversikt over korleis lærebøker er analyserte relatert til innhald og struktur, basert på ein gjennomgang av relevant litteratur. Dei klassifiserer analysar av lærebøker i fire hovudområde: matematisk hensikt, pedagogisk hensikt, sosial kontekst og kulturell tradisjon.

Forsking på det matematiske og pedagogiske formålet med læremiddel analyserer kva syn på matematikk læremiddelet formidlar, og korleis ein best legg til rette for læring. Analyse av den sosiale konteksten gir innblikk i undervisningstradisjonar, stereotypiar og forventningar, og analysar av kulturelle tradisjonar får fram nasjonale verdier og viser at forskjellar mellom læremiddel i matematikk har rot i kulturelle tradisjonar (Mellin-Olsen, 1987).

Dei ulike inndelingane i læremiddelforskinga viser at «linsa» forskarane ser gjennom, har betydning for korleis dei forstår læremiddelet. Læremiddel i matematikk skil seg frå andre læremiddel ved at dei har mindre tekst; dei fleste har primært oppgåver som elevane skal arbeide med. Samtidig har dei felles med læremiddel i andre fag at dei blir sett på som vesentlege når det gjeld å gjere om kompetansemåla i læreplanen til praksis i undervisninga. Dei er med andre ord bindeleddet mellom læreplan og praksis. I forskinga blir læremiddel på dette området forstått som ein «mediator» mellom den nasjonale læreplanen og det som skjer i klasserommet (Pepin & Haggarty, 2001). Vi kjem tilbake til det i del 3 og gjennomgangen av



koplinga til læreplanverket. I denne delen skal vi særleg sjå på forskning på matematiske emne og innhald, i tillegg til pedagogiske og didaktiske val.

## FRAMSTILLING AV MATEMATISKE EMNE OG INNHALD I LÆREMIDDEL

---

Korleis formidlar læremidla sentrale matematiske tema? Det er hovudproblemstillinga i ei rekke internasjonale studiar av lærebøker som ser på korleis spesifikke matematiske emne er behandla i lærebøkene (Fan et al., 2013). Fleire av desse studiane viser at det er nyttig først å få ei oversikt over korleis matematiske tema er strukturerte, og deretter analysere enkelte tema meir detaljert. I studiane er det brukt ulike teoretiske rammeverk for å belyse tilnærminga til emna. Under viser vi dette med tre ulike tilnærmingar.

Først presenterer vi ein studie frå Australia som utvikla kriterium for å analysere lærebøker innan forholdsrekning og proporsjonal tenking, eit emne som oftast blir oppfatta som vanskeleg for elevane (Dole & Shield, 2008). Forskarane utarbeidde kriterium på bakgrunn av litteratur om det matematiske emnet og prinsipp for undervisning. Fire mål for at innhaldet i lærebøkene skulle gi forventa læringsutbytte, danna utgangspunktet for analysen av det matematiske emnet slik det blei presentert i læremidla. Dei fire måla var:

1. Fagstoffet er kontekstualisert.
2. Felles multiplikative strukturar og proporsjonal tenking er framheva.
3. Det er variasjon i representasjonar.
4. Relaterte omgrep og idear er eksplisitt sette i samanheng.

I det første nivået av analysen laga dei eit samandrag av omfanget, rekkefølga og presentasjonen av innhaldet i lærebøkene. Deretter rangerte dei innhaldet som enten sterkt, middels eller svakt knytt til dei fire måla. Dette er eit eksempel på korleis ein gjennom ein todelt analyse kan utvikle vurderingskriterium innanfor eit bestemt matematisk emne gjennom nivådelte rangeringar.

Eksempel nummer to er ein studie der forskarane samanlikna lærebøker frå Kina, Japan og USA (Li, Chen & An, 2009). Dei undersøkte korleis dei utvalde lærebøkene la til rette for undervisning og læring av divisjon med brøk. Dei beskriv analyse av lærebøker på to nivå – makro- og mikronivå. På makronivå dannar ein seg eit oversiktsbilde av korleis innhaldet er strukturert. Analyse på mikronivå gjer det mogleg å undersøke den matematiske tilnærminga. Forskarane utvikla eit teoretisk rammeverk for analyse der dei på makronivå undersøkte på

kva klassesertrinn lærebøker (frå same utgivar) inneheldt divisjon med brøk, og i kor stor utstrekning emnet blei behandla. Ein slik analyse viser kva tankar læremiddelforfattarane har om når det aktuelle matematiske emnet kan utviklast og styrkast. På mikronivå analyserte forskarane korleis dei matematiske omgrepa blei presenterte, og korleis læreboka la til rette for læring og undervisning i det matematiske innhaldet. Slike studiar berører med andre ord spørsmål om progresjon og didaktisk tilnærming i spesifikke emne.

Den tredje studien er ein samanlikningsstudie av korleis addisjon og subtraksjon med brøk blei presentert i lærebøker frå Kypros, Irland og Taiwan (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010b). Med bakgrunn i ein litteraturgjennomgang av tidlegare samanlikningsstudiar utvikla dei tre hovudtilnærmingar og kategoriserte dei som *horisontal*, *vertikal* og *kontekstuell analyse*. I den horisontale analysen såg dei på læreboka som heilskap og fokuserte på generelle karakteristikkar som talet på sider, layout, kva for matematiske emne som var representerte, og organiseringa av dei. Denne analytiske tilnærminga legg vekt på korleis fagstoffet er organisert. Den vertikale analysen går i djupna på eit enkelt matematisk emne og legg vekt på

1. kommunikasjon med elevane – korleis læreboka formidlar matematikk
2. krav til elevane
3. samanhengar mellom ulike emne i læreboka, aktivitetar i klasserommet og livet utanfor klasserommet

Sidan dei berre studerte lærebøkene, gjekk dei ikkje vidare i den kontekstuelle analysen, som dreier seg om korleis læreboka blir brukt av lærarar eller elevar.

Desse tre eksempla har det til felles at dei analyserer læreboka på to ulike nivå – først på eit overordna nivå og deretter på eit meir detaljert nivå. Ved detaljerte analysar (vertikale tilnærmingar eller analysar på mikronivå) er det mogleg å seie noko om korleis læremiddelet kan utvikle den matematiske kompetansen til eleven.

#### KOGNITIVE KRAV, PEDAGOGISK OG DIDAKTISKE VAL

---

Problemløysingsoppgåver og problemløysing er det emnet som dei fleste av dei ikkje-matematikksesifikke læremiddelstudiane undersøker (Fan et al., 2013). Ikkje-matematikksesifikke studiar ser på generelle prinsipp for undervisning og studerer ikkje enkeltområde, slik som i studiane ovanfor.

Som vist i del 1 er problemløysing ein del av den matematiske kompetansen, og problemløysing er knytt til heuristisk tenking (Schoenfeld, 1985), som legg opp til å tenke matematisk og ikkje minst gi elevane hjelp i slik tenking. Ei slik heuristisk tilnærming er avgjerande for å lykkast med å løyse eit problem og i matematisk problemløysing. I Singapore, for eksempel, har slik problemløysing vore implementert i læreplanen sidan 1990. Vidare veit vi at landa som scorar godt i TIMMS, legg vekt på heuristikk og matematisk problemløysing (Fan & Zhu, 2007).

Ein norsk studie av Kongelf (2017b) ser nærmare på seks ulike lærebøker for 9. trinn med tanke på korleis dei behandlar ei heuristisk tilnærming.<sup>11</sup> Kongelf peiker på at LK06 ikkje nemner heuristiske tilnærmingar eller problemløysingsstrategiar. Funn frå studien hans viser at mange av eksempla er løyste ved hjelp av éi eller fleire heuristiske tilnærmingar utan at tilnærminga i seg sjølv er omtalt i læremiddelet. Ifølge studien viser norske lærebøker i liten grad korleis eller når dei ulike heuristiske tilnærmingane kan brukast. Dette gjer det utfordrande for mange lærarar å undervise i problemløysing (Kongelf, 2017a, 2017b).

Å analysere lærebøker for å finne svar på korleis dei kan bidra til læring hos ulike grupper elevar, er eit anna eksempel på eit ikkje-matematikksesifikt perspektiv i forskinga på læremiddel. Brändström (2005) ser i studien sin på korleis lærebøker og oppgåvene i dei legg til rette for differensiering, med vekt på korleis oppgåvene passar til nivået eleven er på når det gjeld kunnskap, forståing og ferdigheiter. I studien ser ho på korleis ei lærebok er organisert med tanke på differensiering. Eit eksempel er at eit kapittel først har ein felles del for alle elevane og deretter ei prøve som indikerer kva oppgåver dei skal arbeide med vidare. Analysen av oppgåvene i læreboka viste at dei fleste oppgåvene differensierte ved hjelp av fleire rekneoperasjonar heller enn fleire kognitive prosessar og høgare kognitive krav. Spesielt oppgåver med låg vanskegrad la opp til å hugse og memorere. Sjølv oppgåver med høg vanskegrad la i liten grad til rette for å sjå samanhengar mellom ulike emne og resonnering. Oppgåvene var ikkje tilpassa verken dei elevane som valde enkle oppgåver, eller dei som valde vanskelegare oppgåver.

Denne tilnærminga til læremiddel er viktig for ikkje å fokusere einsidig på det matematiske innhaldet, men også sjå på korleis fleire kognitive prosessar og høgare kognitive krav kan

---

<sup>11</sup> I analysen ser Kongelf (2017) på alle eksempla i dei seks lærebøkene med tanke på ni heuristiske tilnærmingar: 1) sjå etter mønster, 2) lage ein systematisk tabell, 3) visualisere, 4) gjett og sjekk, 5) løyse delar av problemet, 6) jobbe baklengs, 7) tenke på liknande problem, 8) forenkla problemet og 9) skifte synsvinkel.

påverke læringa hos ulike elevar. Ei slik tilnærming seier noko om at kvaliteten på læremiddelet kan opplevast ulikt for ulike elevar.

Med læremiddel, særleg lærebøker som blir brukte over fleire år, følger det oftast ei lærarrettleiing. Dei fleste lærarrettleiingar inneheld forslag og gir støtte til læraren i planlegginga og gjennomføringa av undervisninga (Remillard, Harris & Agodini, 2014). Ein del lærarrettleiingar gir i tillegg støtte i form av å formidle til læraren kva ein kanskje kan forvente av tankar hos elevane. Dette inkluderer også eventuelle misoppfatningar, viktige matematiske idear og i tillegg målet med designen (Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005; Stein & Kim, 2009). Slike lærarrettleiingar har til hensikt å gi råd og tips til lærarar om bruk av spesifikke læremiddel i undervisninga (Davis & Krajcik, 2005). I ein analyse av to norske lærarrettleiingar fann Svingen (2014) at begge hadde forslag til *kva* læraren kunne gjere, men i liten grad forklarte *kvifor*. Slike lærarrettleiingar inviterer ikkje lærarane inn i den didaktiske tenkinga som ligg bak læremiddelet.

#### DIGITALE LÆREMIDDEL OG VERKTØY I MATEMATIKKUNDERVISNINGA

---

Digitaliseringa av læremiddel skaper nye moglegheiter for undervisninga. I andre fag, og særleg i vidaregåande skole, er digitale læremiddel i bruk i betydeleg større grad enn i matematikk. Likevel har digitale verktøy i matematikk ein naturleg plass både på ungdomsskolen og i vidaregåande skole, ikkje minst fordi fleire kompetansemål eksplisitt legg vekt på at elevane skal løyse oppgåver med digitale verktøy. Desse verktøya har òg vore obligatoriske på eksamen sidan 2015. Ei nyare svensk oversikt over «digitale lærresurser» i matematikkundervisninga opererer med fem ulike kategoriar<sup>12</sup> av slike ressursar i det som svarer til norsk grunnopplæring:<sup>13</sup>

**Uppgifter:** lærresurser som levererar matematikcuppgifter tillsammans med vägledning eller individanpassning. Uppgifterna och vägledningen regleras i

---

<sup>12</sup> I Drijvers' historiske gjennomgang av digitale verktøy (2015), som inngår i forskingsgjennomgangen, er det brukt tre kategoriar: For det første kan digitale verktøy utføre matematiske berekningar som også kan gjerast for hand. I dette perspektivet blir det lagt vekt på at sjølve utrekninga kan gjerast raskare og med større tal. For det andre gir digitale verktøy elevar høve til å øve opp ferdigheiter dersom læringsmiljøet er godt. For det tredje viser enkelte studiar korleis elevar utviklar forståing av omgrep i læringsmiljø med digitale verktøy.

<sup>13</sup> Forskingsgjennomgangen skulle gi svar på kva effekt undervisning med «digitala lærresurser» har på kunnskapar i matematikk, og korleis ein slik eventuell effekt kan forklarast. Den overordna konklusjonen basert på ein gjennomgang av 75 studiar viser at digitale læremiddel og verktøy er nyttige om dei blir brukte i «övrigt rik undervisningsmiljö», men: «det går inte att dra slutsatsen att en lika effektiv undervisning inte skulle kunna utformas på andra sätt, uten digitala lærresurser» (ref., s. XIII)

många fall utifrån hur användaren presterar.

**Objekt:** läresurser med vilka matematik och matematiska objekt, till exempel geometriska former, kan representeras, genom att utnyttja det digitala mediet.

**Spel:** läresurser som utnyttjar spelmekanismer för att förmedla ett ämnesinnehåll, såsom uppdrag, utmaningar, belöningar och tävlingsmoment. Spel karakteriseras ofta av lekfullt utforskande inom ramen för en berättelse.

**Verktyg:** läresurser som har tagits fram i ett annat syfte än för att bedriva undervisning, men som kan användas i matematikundervisningssammanhang, till exempel ett kalkyl- eller grafritande program.

**Kurspaket:** läresurser av ett mer omfattande slag som kan innehålla flera funktioner och beröra många matematikområden. Ofta är kurspaketen tänkta att användas som ett komplement under en längre tid, till exempel under en hel årskurs. I vissa fall handlar det om undervisningspaket som består av olika kombinationer av digitala läresurser och tryckt material samt lektionsupplägg, lärarhandlingar och kompetensutveckling för lärarna.<sup>14</sup>

Basert på dei fem kategoriene som er identifiserte i den svenske studien, kan vi skilje mellom digitale læremiddel og digitale verktøy. Læremiddel har oppgåver (oppgifter), og enkelte gonger inkluderer dei ulike former for belønning (spel). Digitale verktøy gjer det mogleg å representere, manipulere og gjere berekningar på matematiske objekt, som for eksempel Excel og GeoGebra. Dersom vi ser bort frå læreverket (kurspaket) under eitt, står vi igjen med to typar:

1. digitale læremiddel med oppgåver, ofte laga for å øve ferdigheiter

---

<sup>14</sup> Digitale kurspakker er fullstendige læreverker der alle elementa er digitale. Dei har blitt studerte i relativt store elevgrupper over f.eks. eit heilt år. Funna i desse studiane skil seg negativt ut, men forskarane peiker på at dei ikkje veit i kva utstrekning dei digitale kurspakkene er blitt brukte på ein god måte og etter intensjonane.

## 2. digitale verktøy som kan brukast både til utrekningar og til å teikne og modellere objekt

Det er tre interessante funn i denne store gjennomgangen av internasjonal forskning. Berre to studiar er frå Norden. For det første viser ei rekke studiar at effektane på kunnskapsutviklinga er størst når elevane arbeider med eit heilt avgrensa tema eller innhald. Dei peiker på at grunnen til at slike læremiddel skil seg positivt ut, er at dei kan vere lettare å konstruere og enklare å ta i bruk for både lærarar og elevar. Særleg synest slike læremiddel å vere viktige i arbeidet med såkalla terskelomgrep, omgrep som elevane må forstå for å kunne utvikle seg vidare innanfor eit område. For det andre viser studiane at når elevane arbeider med digitale læremiddel, frigjer det tid for læraren, og dersom læremidla tilbyr individuell tilpassing, adaptiv læring, kan det skape særleg gode føresetnader for kunnskapsutvikling (Skolverket, 2017, s. XIV). For det tredje viser studiane at individuelt tilpassa læremiddel er mest vanleg å bruke fram til og med 5.–7. trinn. Deretter blir dei digitale læremidla meir komplekse og krev at lærarane i større grad må få høve til å sette seg inn i korleis læremidla og verktøya bør brukast. Studiar frå høgare trinn viser at det er avgjerande at læraren er bevisst på dette. I tillegg er måten læraren arbeider saman med elevane på, avgjerande for læringsutbyttet.

I Noreg gjer digitaliseringa i matematikkfaget seg mest gjeldande gjennom auka bruk av digitale læremiddel som tilhøyrrer større læreverk i grunnskolen, eller digitale verktøy som Excel og GeoGebra, som særleg blir brukte på dei øvste årstrinna. Dei digitale læremidla inneheld oppgåver og har ofte ein design som speglar det læreverket dei er ein del av. Slike læremiddel tilsvarer kategorien *oppgifter* i den svenske forskingsoversikta vi viste i innleiinga til dette avsnittet.

Digitale verktøy viser til *objekt* og *verktøy* i den svenske oversikta. Eit program som for eksempel GeoGebra gjer det mogleg for elevar å forstå variablar og funksjonar, idet dei vekslar mellom bruk av algebrafeltet, grafikkfeltet og CAS-feltet.<sup>15</sup> Samtidig blir dette digitale verktøyet utvikla med stadig meir innhald, slik at det også får element av å vere eit digitalt læremiddel.<sup>16</sup> Denne utviklinga viser at det kan vere problematisk å kategorisere digitale

---

<sup>15</sup> CAS står for Computer Algebra System. Bruk av CAS er obligatorisk til eksamen i matematikk T, R og S i vidaregåande opplæring, og bruken skal dokumenterast med utskrift eller skjermdump. Kjelde: <http://www.matematikkenteret.no/content/4604/CAS> og <https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/eksamensordning-skriftlig-eksamen-i-matematikk/>

<sup>16</sup> Her er eit eksempel på ei slik utvikling, der det blir gitt ei oppgåve inne i GeoGebra-programmet før eleven blir bedt om å skrive funksjonsuttrykket inn i sjølve verktøyet <https://www.geogebra.org/m/D7ZRFh3x>

læremiddel og verktøy i matematikk på same måte som ein kan med analoge læremiddel og verktøy i faget.

Forskning frå review-studiar som også er med i forskingsgjennomgangen ovanfor (Drijvers, 2015; Trouche & Drijvers, 2014), viser at læraren må ha god kjennskap til det digitale verktøyet, og at organisering av undervisning med bruk av digitale læremiddel og digitale verktøy må gjerast på ein måte som gir eit godt læringsutbytte. Det er altså krevjande å gjennomføre slik undervisning, og lærarane må ha kompetanse i bruk av det digitale verktøyet.

Det er verdt å legge merke til at denne forskingsgjennomgangen viser at digitale verktøy og læremiddel har størst effekt dersom dei blir brukte på avgrensa tema eller på tema som elevar har problem med. I dei første åra på grunnskolen bruker elevane dei sjølvstendig og individuelt, og ofte for å trene ferdigheiter. På dei øvre trinna er bruken av digitale verktøy meir omfattande og ofte meir krevjande for både læraren og eleven. Studiane viser at det er viktig at det digitale hjelpemiddelet er designa riktig, og at det må brukast på riktig måte. Læraren må legge til rette undervisninga slik at dei ulike verktøya passar til dei oppgåvene som blir gitt. Sjølv om det digitale verktøyet både er godt designa, tilrettelagt og tilpassa oppgåvene, viser forskinga at det ikkje bidrar til betre læring dersom læraren ikkje har ei bevisst, grunnleggande forståing av dei læringsteoretiske perspektiva og didaktiske ideane bak læringsaktivitetane. Pedagogikk og didaktikk er med andre ord overordna både designen på teknologien og moglegheitene det gir: «... the main guidelines should come from pedagogical and didactical considerations rather than being guided by the technology's limitations or properties» (Drijvers, 2015, s. 147).

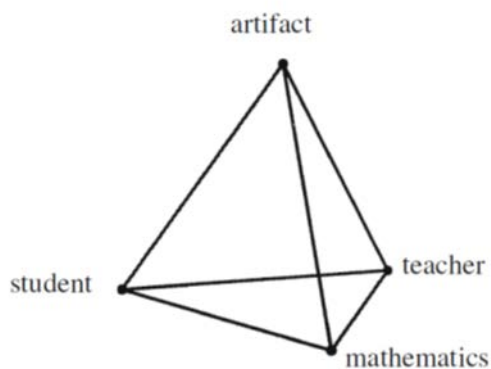
## OPPSUMMERING AV DEL 1 OG DEL 2

---

Del 1 og del 2 i denne forskingsgjennomgangen skaper eit grunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk. Del 1 la særleg vekt på rammeverk som belyste matematisk kompetanse og samanhengen mellom undervisning, læremiddel og læringsutbytte. Del 2 la vekt på den forskinga som analyserer sjølve læremiddelet. I begge delane er det problematisert korleis ein alltid må sjå læremiddel i relasjon til kontekst, kultur, lærar, elev og ikkje minst kulturen til faget. Eit didaktisk tetraeder kan brukast til å visualisere desse relasjonane.

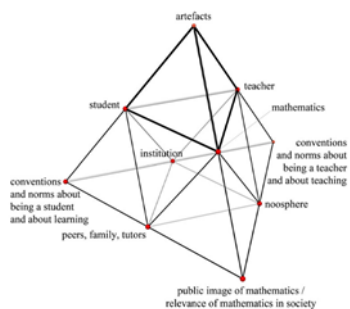
Rezat and Sträßer (2012) gjekk ut frå at matematikkundervisning inneber bruk av ulike læremiddel eller læringsressursar. Dei såg derfor behovet for å utvide den didaktiske trekanten

lærer–elev–matematikk til også å omfatte all bruk av læremiddel/læringsressursar (Figur y). Dette har dei gjort ved å plassere læremiddelet på toppen av tetraederet ved å sjå på det som ein artefakt. Visualiseringa synleggjer korleis læremiddelet alltid står i relasjon til læraren, eleven og faget sjølv.



Figur y: Det didaktiske tetraederet

Forståinga av kvalitetskriterium i læremiddel er også forankra i ein breiare sosial og kulturell kontekst som har sine egne sett av normer. Desse kontekstuelle forholda er visualiserte i ei vidareutvikling av modellen (Rezat & Sträßer, 2017), som viser heile kompleksiteten i bruken av læremiddel/læringsressursar.



Figur z1 Utvida didaktisk tetraeder

Det utvida didaktiske tetraederet belyser kompleksiteten i det å utvikle kvalitetskriterium for læremiddel. Bruken av læremiddel må alltid sjåast i relasjon til både elevane, læraren og faget sjølv. Å ha det som utgangspunkt er viktig når ein som lærar eller lærarkollegium skal vurdere læremiddel. I bruken av modellen har Rezat and Sträßer (2013) sett på nordiske studiar. Dei finn at majoriteten ser på samanhengen mellom lærebok og matematikk og i mindre grad på relasjonen mellom lærar og læremiddel eller mellom elev og læremiddel. (Bjarnadóttir, 2007;



Bremner, 2003; Brändström, 2005; Jakobsson-Åhl, 2006; Keranto & Sarenius, 2009; Kongelf, 2017b). Som vi peikte på i innleiinga, er den nyutvikla digitale rettleiaren skapt for å auke bevisstheita om relasjonen mellom lærar og læremiddel. Rettleiaren er derfor ikkje laga for å finne eit «fasitsvar» når det gjeld kvaliteten på eit læremiddel uavhengig av relasjonane læremiddelet skal brukast i.

### DEL 3: KVALITETSKRITERIUM FOR LÆREMIDDEL I MATEMATIKK – EIT GRUNNLAG FOR DEN DIGITALE RETTLEIAREN

---

Dette arbeidet med å lage kvalitetskriterium for læremiddel er ikkje unikt i internasjonal samanheng. Dei siste ti åra har det ved fleire anledningar vore gjennomført eit omfattande arbeid med å lage kvalitetskriterium for val av læremiddel. I USA blei det lansert ein rapport som problematiserer studiar av papirbaserte læremiddel (textbooks).<sup>17</sup> I Hong Kong har myndigheitene utvikla rettleiande prinsipp som læraren kan følge i valet av lærebøker. Prinsippa er utvikla for både papirbaserte og digitale læremiddel og lærebøker. Basert på gitte kriterium kan lærarar søke opp dei læremidla som er tilgjengelege i ulike fag.<sup>18</sup> I desse oversiktene ligg det ei statleg vurdering, og tilnærminga skil seg frå den digitale rettleiaren som er utvikla i dette oppdraget.

I England er det også utvikla rammeverk for kvalitetskriterium i læremiddel. Her er kriteria sette inn i ein fagleg samanheng på ein måte som liknar det som er gjort for matematikkfaget i dette grunnlagsdokumentet.<sup>19</sup> Enkelte økonomiske rapportar legg vekt på korleis læremiddel, både trykte og digitale, bidrar til at lærarar kan spare tid og undervisninga betre kan tilpassast den enkelte eleven.<sup>20</sup> Vi avgrensar oss til å sjå nærmare på rammeverk for kvalitetskriterium i Noreg, Sverige og Danmark. Danmark har hatt eit eige nasjonalt senter for læremiddelforskning i ti år (2007–2017).

I Noreg har Senter for IKT i utdanninga laga rettleiaren *Hensiktsmessig bruk av IKT i klasserommet* (2015).<sup>21</sup> Rettleiaren fokuserer ikkje på læremiddel generelt, men tar opp problemstillingar knytte til klasseleiing og læringsmiljø i klasserom der kvar elev har sin eigen skjerm. Der heiter det at «en ressurs kan ha god pedagogisk kvalitet i en sammenheng, men ikke nødvendigvis i en annen», og det blir vist til dokumentet *Kvalitetskriterier for digitale*

---

<sup>17</sup> <https://standardswork.org/wp-content/uploads/2017/03/sw-curriculum-research-report-fnl.pdf>

<sup>18</sup> <https://cd.edb.gov.hk/rtl/search.asp>

<sup>19</sup> <http://www.cambridgeassessment.org.uk/images/cambridge-approach-to-textbooks.pdf>

<sup>20</sup> <http://www.frontier-economics.com/documents/2018/03/publishing-contribution-school-education.pdf>

<sup>21</sup> Frå 1. januar 2018 er Senter for IKT i utdanninga slått saman med Utdanningsdirektoratet. Det nye namnet er Direktoratet for barnehage, skole og IKT. Rettleiaren til det tidlegare IKT-senteret finn du her: [https://iktsenteret.no/sites/iktsenteret.no/files/attachments/veileder\\_hensiktsmessig\\_bruk\\_bm\\_lav.pdf](https://iktsenteret.no/sites/iktsenteret.no/files/attachments/veileder_hensiktsmessig_bruk_bm_lav.pdf)

*læringsressurser* (IKT-senteret, 2010). Dette dokumentet blei utvikla i 2009/2010, og er orientert mot tekniske kriterium for utviklarar og innkjøparar, i tillegg til at det skal vere til hjelp for lærarar når dei skal vurdere korleis ulike digitale læringsressursar eignar seg i pedagogiske samanhengar. Dei pedagogiske vurderingskriteria i rettleiaren til det tidlegare IKT-senteret blei organisert i tre kategoriar:

1. brukarorientering
2. eigenarten ved den digitale ressursen
3. den faglege og pedagogiske orienteringa

Den faglege bakgrunnen for utarbeidinga av desse prinsippa fann IKT-senteret i BECTAs dokument *Quality principles for digital learning resources* (2007).<sup>22</sup>

Kvar av dei tre nemnde kategoriane har eit sett med grunnleggande og utdjupande spørsmål. Særleg med tanke på digitale læremiddel i matematikk vil mange av desse spørsmåla vere gyldige, derfor bygger vi vidare på denne tilnærminga i utforminga av spørsmål til den digitale rettleiaren som er presentert på nettsidene til Udir. Vi kjem tilbake til spørsmåla om brukarvennlegheit og universell utforming i punkta under.

I Sverige har ei interesseforeining for utviklarar av læremiddel (Svenska Läromedel) våren 2018 utvikla og publisert *Läromedelskollen*.<sup>23</sup> Intensjonen er å auke bevisstheita om både læremidla og omgrepsbruken i diskusjonar om læremiddel. Arbeidet på skolane er tenkt å ta utgangspunkt i sju spørsmål, som mellom anna belyser innhald, struktur, formgiving og fleksibilitet. Enkelte av spørsmåla som er utvikla i *Läromedelskollen*, liknar på spørsmåla i den digitale rettleiaren, men strukturen er annleis, og dokumentet er statisk. Det er tenkt som eit ark (PDF) til utskrift eller som ei nettside med spørsmål til lærarane. Målet med den svenske «rettleiaren» er omtrent det same som med den norske rettleiaren – at arbeidet med val av læremiddel skal auke bevisstheita hos lærarane og bli ein del av det systematiske kvalitetsarbeidet ved skolen.

I Danmark blei det i 2009 gjennomført ei undersøking, *Digitale læringsressourcer i folkeskolen og de gymnasiale ungdomsuddannelser* (Drotner, Duus & Dahler, 2009). Denne

---

<sup>22</sup> BECTA står for British Educational Communications and Technology Agency i UK, og blei finansiert av Department for Education (tilsvarende Utdanningsdirektoratet). Senteret blei etablert i 1998 og lagt ned i 2011, da det ikkje lenger fekk statleg finansiering. [http://laeremiddel.dk/wp-content/uploads/2012/07/Quality\\_principles.pdf](http://laeremiddel.dk/wp-content/uploads/2012/07/Quality_principles.pdf) (lese 22.03.2018)

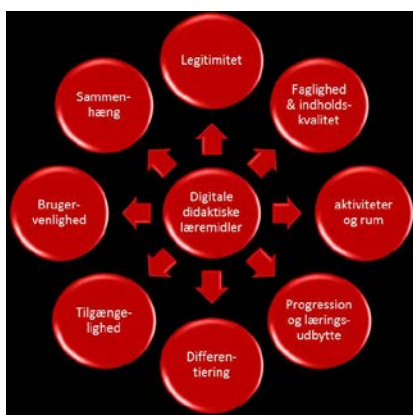
<sup>23</sup> <http://svenskalaromedel.se/fakta/laromedelskollen/>

undersøkinga og andre rapportar la grunnlaget for fleire ulike publikasjonar som diskuterer kvalitet i digitale læremiddel. Ei teoretisk tilnærming i dette arbeidet finn vi i dokumentet *Kvaliteter ved digitale læremidler og ved pædagogiske praksisser med digitale læremidler*<sup>24</sup>. Dokumentet er eit forskingsbasert bidrag der det blir utvikla åtte parametrar til bruk ved evaluering av digitale didaktiske læremiddel (sjå figur 3.2).

Danskane legg særleg vekt på tre parametrar:

1. legitimitet
2. faglegheit og innhaldskvalitet
3. aktivitetar og rom

Det blir påpeikt at dersom læremiddelet ikkje kan vurderast positivt etter desse tre kriteria, er det liten grunn til å arbeide vidare med det. Med andre ord er relasjonen til læreplanen (legitimitet), fagleg kvalitet og potensial for organisering kriterium som er overordna dei andre i det danske rammeverket.



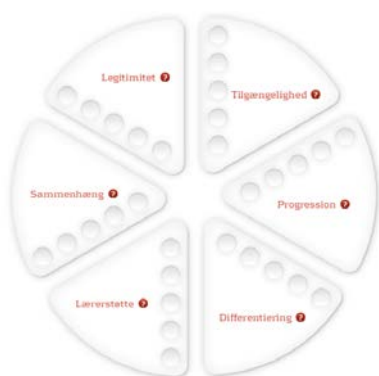
Figur 3.1 – Parametrar til evaluering av digitale, didaktiske læremiddel (Kilde: Læremiddel.dk)

Nokre år seinare utvikla Læremiddel.dk ein praktisk orientert guide for lærarar som ville undersøke læremiddel og kvaliteten på dei. Dette verktøyet kan brukast på både analoge og digitale læremiddel. Guiden inneheld ei sjekklisse med seks kriterium:

<sup>24</sup> <http://laeremiddel.dk/forskningsrapport-om-digitale-laeremidler/> (lese: 4.10.2017)

1. legitimitet
2. tilgjengelegheit
3. progresjon
4. differensiering
5. lærarstøtte
6. samanheng

Denne lista blir omtalt som ein «læremiddeltjek» og er illustrert som vist i figur 3.2. Vidare er kvart av kriteria delt inn i kriterium for design (uttrykk), innhald og aktivitet. Senteret utvikla i tillegg nokre eksempel og ei notatbok der lærarane sjølve kunne gå igjennom alle seks kriteria.



Figur 3.2 – Læremiddeltjek. (Kilde: læremiddel.dk)

Den danske *læremiddeltjek* har trekk som liknar den norske digitale rettleiaren, men har ikkje dei same funksjonalitetane i sjølve arbeidet. Inndelinga i seks delar er også meir omfattande enn den norske delinga i tre overordna tema.

#### KVALITETSKRITERIUM FOR LÆREMIDDEL I MATEMATIKK

---

I innleiinga til del 1 blei læremiddel definert, og det blei distansert frå ressursar for læring. Læremiddel er laga med utgangspunkt i kompetansemåla. Følgeforskinga etter Kunnskapsløftet har vist at mange skoleleiarar og lærarar i liten grad arbeider med å forstå

læreplanverket utover arbeidet med kompetansemåla.<sup>25</sup> I arbeidet med fagfornyinga blir det utarbeidd nye kompetansemål, som bygger på denne definisjonen:

Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.

KD, Overordna del, september 2017

Dei som utviklar læremiddel i matematikk og andre fag, må ta omsyn både til dette overordna kompetanseomgrepet og til dei enkelte kompetansemåla i kvart fag slik dei er formulerte i arbeidet med dei nye læreplanane som skal tre i kraft hausten 2020.

## DESIGN

---

Som vist i gjennomgangen av forkinga i del 2 er det utvikla både horisontale, vertikale og kontekstuelle perspektiv i komparative studiar av læremiddel (Charalambous et al., 2010b). Slike studiar underbygger forståinga av design. Den horisontale analysen gir ei oversikt over læremiddelet ved at det blir lagt vekt på kor mange sider det består av (også nettsider), layout og korleis matematiske emne er organiserte og representerte. Ei slik tilnærming ligg nok tett opp til det som har vore praksis for mange lærarar i vurderinga av læremiddel. Den vertikale analysen er meir omfattande og belyser korleis læreboka formidlar matematikk, kva for krav ho stiller til elevane, og ikkje minst samanhengar mellom emna i boka og aktivitetar i og utanfor klasserommet. Det er særleg analysar på eit overordna nivå det blir lagt vekt på i første del av rettleiaren.

I denne første delen er det også lagt inn påstandar om brukarvennlegheit og universell utforming. I Noreg er dei lovpålagde krava i WCAG 2.0 (Web Content Accessibility Guidelines) eit minimumskrav ved utvikling av nettsider.<sup>26</sup> I 2013 blei ei forskrift om

---

<sup>25</sup> Undersøkinga *Spørsmål til Skole-Norge* (2014) viser at under halvparten av dei spurde skoleleiarane og -eigarane svarte at generell del og prinsippa for opplæring inngår i lokale planar. Funna blir bekrefta i *Evalueringen av Kunnskapsløftet* (2014), som viser at kompetansemål og vurdering inngår i lokalt arbeid med læreplanar, men at læreplanverket totalt sett ikkje nødvendigvis blir følgt opp systematisk. Svar på tilsvarende spørsmål i 2016 viser at det berre har vore små endringar når det gjeld å følge opp læreplanverket.

<sup>26</sup> <https://uu.difi.no/krav-og-regelverk/wcag-20-standard/ikke-lovpalagte-krav>. Denne standarden gjer at menneske med nedsett funksjonsevne kan bruke og orientere seg i det digitale innhaldet. Tidlegare har digitale læremiddel vore unntatt lovverket om universell utforming. Statped har spelt ei viktig rolle i å oppfylle § 5-9 i opplæringslova, som seier at staten har plikt til å skaffe læremiddel til alle elevar. Dette ansvaret er delegert til

universell utvikling av IKT-løysingar publisert, og frå januar 2018 gjeld ho også for digitale læremiddel. I paragraf 3 d i forskrifta er digitale læremiddel definerte som «nettbaserte redskaper som kan brukes i det pedagogiske arbeidet, og som er utviklet med hensikt å støtte læringsaktiviteter». Både verktøy og læremiddel kjem altså inn under lova.

Kvalitetskriteria for læremiddel i matematikk må ta omsyn til krava til universell utforming og inkludering samtidig som dei faglege og didaktiske elementa blir tatt vare på. Å vurdere design knytt til det faglege og didaktiske, handlar i den første delen om brukarvennlegheit og design og om å sjå på innhald, struktur og layout (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010a; Li et al., 2009). Det er viktig at læremidla har ein bevisst språkbruk, slik at både ord, uttrykk, bilde og figurar er enkle å forstå og gir meining i ein kontekst. Læremidla må vise samanhengar, slik at elevane får det overordna bildet, ikkje berre delar av det.

#### PEDAGOGISK OG DIDAKTISK KVALITET

---

Kvalitetskriterium som er knytte til fagleg, pedagogisk og didaktisk kvalitet, er omfattande. Spørsmål om kvalitet på dette nivået er nært knytte til kva tilnærming læraren har til matematikk, slik det blei illustrert med tetraederet i slutten av del 2. Her blir det i større grad lagt vekt på ein vertikal analyse og ikkje ein overordna analyse av design, layout og totalitet.

Pedagogiske og didaktiske kvalitetskriterium ved læremiddel vil vere sensitive overfor den praksisen kvar enkelt lærar har utvikla. Eit læremiddel med høg kvalitet vil ikkje nødvendigvis vere kvalitativt bra for ein lærar som har lang erfaring med ei anna didaktisk tilnærming enn det læremiddelet legg opp til. Dersom ein lærar har ei tilnærming som krev relativt lite av elevane, vil det krevje både etterutdanning og refleksjon å implementere vanskelegare oppgåver og tilnærming i enkelte tema (Boston & Smith, 2011). Desse elementa må vegast opp mot det faglege innhaldet i læremiddelet og måten læremiddelet er kopla til læreplanverket på. Særleg i denne delen av rettleiaren vil lærarar truleg gi ulike vurderingar av det same læremiddelet.

---

direktoratet. Statped skal ha eit spesielt ansvar for å utarbeide læremiddel for barn og elevar med synsvanskar eller høyrsvanskar og for elevar med behov for alternativ og supplerande kommunikasjon.

WCAG 2-0-AA-standard for tilgjengelegheit inneber mellom anna at læremidla skal vere

- mogleg å oppfatte for alle, f.eks. synshemma og høyrshemma
- mogleg å betene for alle, også dei med funksjonsnedsetting
- leselege og forståelege – det gjeld både innhald og betening
- robuste og enkelt kunne takast i bruk

Spørsmåla i denne delen legg særleg vekt på å vurdere korleis læremiddelet bidrar til å føre eleven fram mot kompetanse i faget (Kilpatrick et al., 2001; Niss & Jensen, 2002). I det ligg også vurderingar av om læremiddelet bidrar til å fremme ein undervisningspraksis som gir rom for djupnelæring (Ludvigsen, 2014; NCTM, 2014). Det inneber at læremiddelet legg til rette for varierte arbeidsmåtar og har oppgåver og aktivitetar som gir rom for resonnering og problemløysing og lar eleven utvikle fleksible strategiar og evne til å bruke og knyte saman matematiske representasjonar.

#### KOPLING TIL LÆREPLANVERKET

---

Koplingar til læreplanverket kan komme til uttrykk på mange måtar. Ei overordna tilnærming er å vurdere i kva grad læremiddelet tar vare på verdiar og prinsipp som vitskapleg tenkemåte, skaparglede, engasjement og utforskartrøng. I det ligg også ei vurdering av om læremiddelet bidrar til overordna verdiar og mål i læreplanverket.

I denne tredje delen av rettleiaren er det lagt særleg vekt på korleis læremiddelet kan brukast til å støtte opp om læreplanverket totalt sett. Som det er peikt på i innleiinga til dette grunnlagsdokumentet, legg den overordna delen føringar for arbeidet med faga. Ikkje minst set verdiar og prinsipp for grunnopplæringa kompetansen inn i ein større samanheng.

Eitt av måla i fornyinga av Kunnskapsløftet er å styrke djupnelæring og forståing i faga (Meld. St. (2015–2016)). Påstandane i del 3 i grunnlagsdokumentet må sjåast i dette perspektivet, derfor er spørsmåla i denne delen av den digitale rettleiaren knytte til dei seks kjerneelementa i matematikk:

- utforsking og problemløysing
- modellering og bruk
- resonnering og argumentasjon
- representasjon og kommunikasjon
- abstraksjon og generalisering
- matematiske kunnskapsområde

Til kvart av desse seks kjerneelementa i matematikk er det knytt påstandar. Ein kort informasjonstekst introduserer kvart av dei nye kjerneelementa.



Gjennomgangen i del 1 og del 2 i dette dokumentet viser at forskinga som dannar grunnlag for å utvikle kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk, er nært relatert til studiar av matematikkundervisning. Det igjen viser at det ved ei eventuell utvikling av kvalitetskriterium for andre fag, som norsk og engelsk, vil vere behov for ein tilsvarande gjennomgang av fagleg relevant forskning.

På den andre sida vil erfaringane med dette kunnskapsgrunnlaget, spørsmål knytte til læreplanverket og ikkje minst strukturen som ligg i dette dokumentet, vere mogleg å overføre til tilsvarande dokument for andre fag. Det gjeld særleg måten rettleiaren i matematikk er nært knytt til kompetanse i faget på, og kjerneelementa som ligg til grunn for den læreplanen som læremiddelet skal bidra til å realisere som ein del av ein større sosial og kulturell institusjonell aktivitet – undervisninga gitt av læraren og læringa hos eleven.

I løpet av hausten 2018 vil direktoratet sette i verk tiltak for å implementere rettleiaren for kvalitetskriterium i matematikk. Eitt av tiltaka vil vere pilotering av rettleiaren i nokre utvalde realfagskommunar. Samtidig vil direktoratet vurdere om det er behov for å undersøke korleis rettleiaren blir brukt, og om han blir opplevd som nyttig. Det kan også vere aktuelt å undersøke kva for andre fag som har behov for kvalitetskriterium, og om det er behov for kompetanseheving hos lærarar, skoleleiarar eller skoleeigarar i val og bruk av læremiddel.

- Andrews, P. (2001). 19 Comparing international practice in the teaching of mathematics. *Issues in mathematics teaching*, 294.
- Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. Londonn: Continuum.
- Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the Book: What Is: Or Might Be: The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational Researcher*, 25(9), 6-14. doi:10.2307/1177151
- Baroody, A. J. (2006). Mastering the Basic Number Combinations. *Teaching Children Mathematics*, 23.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180.
- Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMMS 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Bjarnadóttir, K. (2007). The numbers one and zero in Northern European textbooks. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 2(2), 3-20.
- Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School. *Teachers College Record*, 110(3), n/a.
- Boston, M. D., & Smith, M. S. (2011). A 'task-centric approach'to professional development: enhancing and sustaining mathematics teachers' ability to implement cognitively challenging mathematical tasks. *ZDM*, 43(6-7), 965-977.
- Bremner, N. (2003). *Matteboken som redskap och aktör: en studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 1967-2002*: Institutionen för undervisningsprocesser, kommunikation och lärande, Lärarhögskolan i Stockholm.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty*. Luleå tekniska universitet,
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*: ERIC.
- Chapin, S. H., & O'Connor, C. (2007). Academically productive talk: Supporting students' learning in mathematics. *The learning of mathematics*, 113-128.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010a). The addition and subtraction of fractions in the textbooks of three countries: A comparative analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010b). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher*, 34(3), 3-14.
- Dole, S., & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, 10(1), 19-35.
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135-151). Cham: Springer International Publishing.
- Drotner, K., Duus, V., & Dahler, A. (2009). Digitale læringsressourcer i folkeskolen og i de gymnasiale ungdomsuddannelser. Odense: DREAM: Danish Research Centre on Education and Advanced Media Materials and Læremiddel. dk: Nationalt videncenter for læremidler.

- Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61-75.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x
- Fuson, K. C., Kalchman, M., & Bransford, J. D. (2005). Mathematical understanding: An introduction. *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom*, 217-256.
- Gilje, Ø. (2017) *Læremidler og arbeidsformer i den digitale skolen*. Bergen: Fagbokforlaget.
- Gilje, Ø., Ingulfen, L., Dolonen, J., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., . . . Skarpaas, K. (2016). *Med ARK&APP. Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Sluttrapport. Oslo. UiO.
- Grevholm, B. (2017). *Mathematics textbooks, their content, use and influences : research in Nordic and Baltic countries*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.
- Hatlevik, O. E., Egeberg, G., Guðmundsdóttir, G. B., Loftsgarden, M., & Loi, M. (2013). Monitor skole 2013. *Om digital kompetanse og erfaringer med bruk av IKT i skolen. Rapport. Senter for IKT i utdanningen*.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.
- Hiebert, J. (2013). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*: Routledge.
- Hiebert, J., Morris, A. K., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58(1), 47-61.
- Hodgson, J., Rønning, W., & Tomlinson, P. (2012). *Sammenhengen mellom undervisning og læring. En studie av læreres praksis og deres tenkning under Kunnskapsløftet. Sluttrapport, 4*.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 169-202.
- Jakobsson-Åhl, T. (2006). *Algebra in upper secondary mathematics: a study of a selection of textbooks used in the years 1960-2000 in Sweden*. Luleå tekniska universitet,
- Johansson, M. (2017). Textbook as instrument: three teachers' way to organize their mathematics lessons. In B. Grevholm (Ed.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence; Research in Nordic and Baltic countries* (pp. 315-340). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20.
- Karlsen, L., & Maagerø, E. (2010). Lesing av fagtekster i matematikk. In D. Skjelbred & B. Aamotsbakken (Eds.), *Lesing av fagtekster som grunnleggende ferdighet* (pp. 217-270). Oslo: Novus forlag.
- Keranto, T., & Sarenius, V.-M. (2009). The number line as a teaching aid in the grades 1-2: Textbook analysis and pupil interview. *Teaching mathematics retrospective and perspectives*, 206.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up. *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Washington, DC: National Academy Press*.
- Kjærnsli, M., & Jensen, F. (2016). *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Klette, K. (2003). Lærerenes klasseromsarbeid; Interaksjons-og arbeidsformer i norske klasserom etter Reform 97. *The Teacher's Classroom Work*.
- Klette, K. (2013). Hva vet vi om god undervisning? Rapport fra klasseromsforskningen. In R. J. Krumsvik & R. Säljö (Eds.), *Praktisk-pedagogisk utdanning : en antologi* (pp. 173-201). Bergen: Fagbokforl.
- Klette, K., Lie, S., Ødegaard, M., Anmarkrud, Ø., Arnesen, N., Bergem, O. K., & Roe, A. (2008). Rapport om forskningsprosjektet PISA+. *Oslo: Norges forskningsråd*.
- Kongelf, T. R. (2017a). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. In B. Grevholm (Ed.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence. Research in Nordic and Baltic countries* (pp. 195-222). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

- Kongelf, T. R. (2017b). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. In B. Grevholm (Ed.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence*. (pp. 155-194). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
- Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper*.
- Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM*, 41(6), 809-826.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Ludvigsen, S. (2014). *Fremtidens skole: fornyelse av fag og kompetanser*. Oslo: NOU.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-44.
- Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education* (Vol. 4): Springer Science & Business Media.
- Mullis, I. V., & Martin, M. O. (2014). *TIMMS Advanced 2015 Assessment Frameworks*: ERIC.
- NCTM. (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. In N. C. o. T. o. Mathematics (Ed.): Author Reston, VA.
- Nilsen, T., & Gustafsson, J.-E. (2016). *Teacher Quality, Instructional Quality and Student Outcomes*. Cham: Springer Open.
- Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18): Undervisningsministeriet.
- Nordenbo, S. E. (2008). *Lærerkompetanser og elevers læring i barnehage og skole: et systematisk review utført for Kunnskapsdepartementet, Oslo*. [København]: Danmarks Pædagogiske Universitetsforlag og Dansk Clearinghouse for Uddannelsesforskning.
- Olsen, R. V., & Kjærnsli, M. (2013). *Fortsatt en vei å gå: norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Organisation for Economic, C.-o., & Development. (2013). *PISA PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*: France: OECD Publishing.
- Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM*, 45(7), 929-943.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175. doi:10.1007/bf02656616
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2011). Teachers' use of mathematics curriculum materials : differentiation in mathematics classrooms in England and Norway. In (pp. 393-404). Trondheim: Tapir akademisk forl., cop. 2011.
- Reinhart, S. C. (2000). Never say anything a kid can say! *Mathematics teaching in the middle school*, 5(8), 478.
- Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM*, 46(5), 735-749. doi:10.1007/s11858-014-0585-z
- Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM*, 44(5), 641-651.
- Rezat, S., & Sträßer, R. (2013). Methodologies in Nordic Research on Mathematics Textbooks. In B. Grevholm, P. S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko, & P.-E. Persson (Eds.), *Nordic Research in Didactics of Mathematics: Past, Present and Future* (pp. 469-482). Oslo: Cappelen Damm.
- Rezat, S., & Sträßer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. In B. Grevholm (Ed.), *Mathematics textbooks, their content, use and influence. Research in Nordic and Baltic countries* (pp. 495-514). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
- Sawyer, R. K. (2014). Introduction. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (2 ed., pp. 1-18). Cambridge: Cambridge University Press.

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*: Elsevier.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Skaalvik, E., Danielsen, I., & Skaar, K. (2007). De viktige få. Analyse av Elevundersøkelsen 2007. In: Kristiansand, Norway: Oxford Research.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Stein, M. K., & Kim, G. (2009). The role of mathematics curriculum materials in large-scale urban reform. *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*, 37-55.
- Svingen, O. E. L. (2014). *Analyse av to lærerveiledninger i matematikk-særtrekk og læreres bruk av dem*. (Master), Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim.
- Trouche, L., & Drijvers, P. (2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 33(3), 193-209. doi:10.1093/teamat/hru014
- Utdanningsdirektoratet. (2012). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Retrieved from [https://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK\\_grf\\_2012.pdf?epslanguag e=no](https://www.udir.no/Upload/larerplaner/lareplangrupper/RAMMEVERK_grf_2012.pdf?epslanguag e=no).